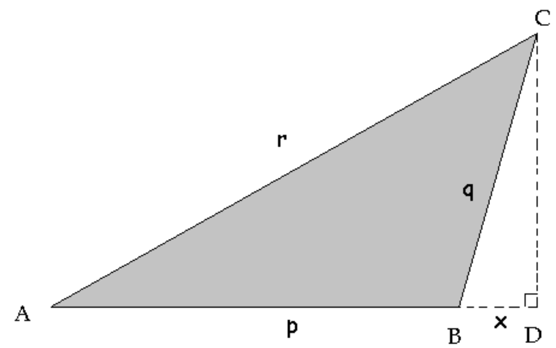
Área del triángulo



Expresar el área del ΔABC en función de las longitudes de sus lados p, q y r.

$$h^2 = q^2 - x^2 \ (\varDelta BDC)$$

$$h^2 = r^2 - (p + x)^2 \ (\varDelta ADC)$$

$$\therefore \ x = \frac{r^2 - p^2 - q^2}{2p}$$

(Puesto que $h^2 = (q - x)(q + x)$)
Sustituyendo el valor de x y factorizando, se obtiene:

$$h^2 = \frac{(p + q + r)(-p + q + r)(p - q + r)(p + q - r)}{(2p)^2}$$

$$\acute{A}rea \ del \ \Delta ABC = \frac{1}{2!} hp$$

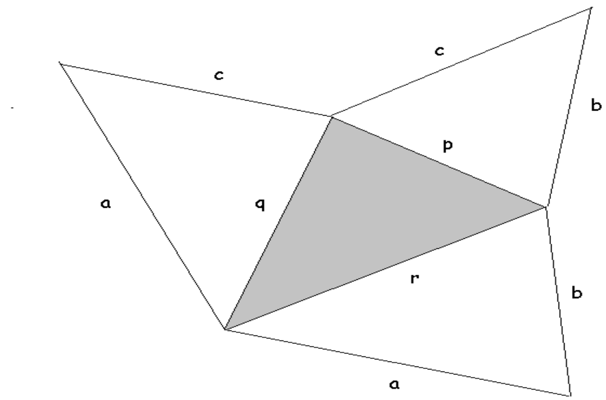
Si A es el área del ΔABC , entonces:

$$A^2 = \frac{(p + q + r)(-p + q + r)(p - q + r)(p + q - r)}{(2 \cdot 2!)^2}$$

Relaciones entre dos triángulos
Si S es el área del triángulo cuyas longitudes de sus lados son u, v y w, y T es el área de otro triángulo cuyas longitudes de sus lados son p, q y r; entonces:

$$(2 \cdot 2!)^2 ST \leq p^2(-u^2 + v^2 + w^2) + q^2(u^2 - v^2 + w^2) + r^2(u^2 + v^2 - w^2)$$

(Que se deduce aplicando la desigualdad de *Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz*. La igualdad solamente es válida cuando los triángulos son semejantes)

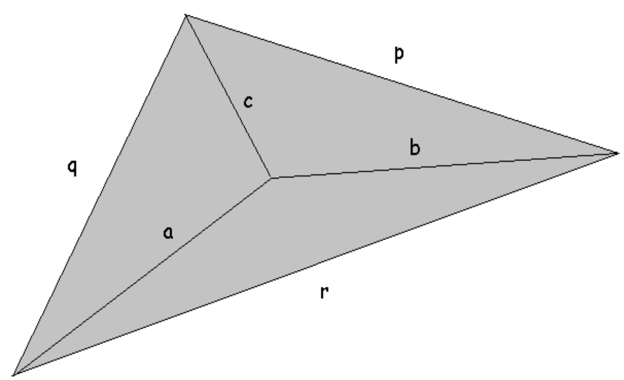


Si T es el área del triángulo cuyas longitudes de sus lados son p, q y r, P es el área del triángulo cuyas longitudes de sus lados son a, b y r, Q es el área del triángulo cuyas longitudes de sus lados son p, b y c, y R es el área del triángulo cuyas longitudes de sus lados son a, q y c, entonces:

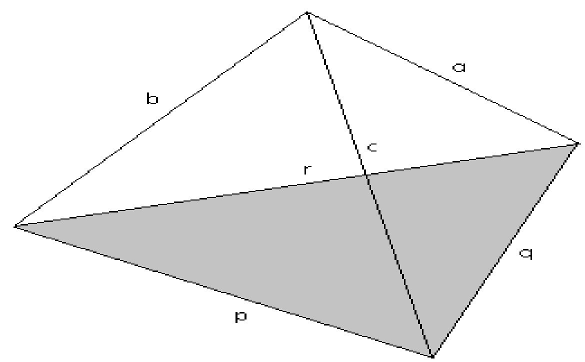
$$T \leq P + Q + R$$

La igualdad es válida cuando el vértice opuesto a una cara se halla en el interior del triángulo determinado por esa cara (en el plano).
Por consiguiente, si las longitudes de las aristas de un tetraedro son p, q, r, a, b y c, donde a, b y c son lados concurrentes, entonces:

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + a^2(-p^2+p^2+r^2) + b^2(p^2-q^2+r^2) + c^2(p^2+q^2-r^2) \geq 0$$



Volumen del tetraedro



Si a, b, c, p, q y r son las longitudes de las aristas de un tetraedro y V es su volumen, entonces:

$$V^2 = \frac{\left(\left(b^2c^2 + a^2p^2\right)\left(-p^2 + q^2 + r^2\right) + \left(a^2c^2 + b^2q^2\right)\left(p^2 - q^2 + r^2\right) + \left(a^2b^2 + c^2r^2\right)\left(p^2 + q^2 - r^2\right)\right) - \left(a^4p^2 + b^4q^2 + c^4r^2 + p^2q^2r^2\right)}{(2 \cdot 3!)^2}$$